数理解析研究所講究録
1123 巻 2000 年 20-29

平均曲率流に対する 2 つの近似法について

神戸商船大学　石井　克幸 (Katsuyuki Ishii)

1　序

[4] を元にした飯田氏による servay talk [7] では界面の運動方程式がある半線形放物型方程式の特異極限として現れることを形式的に導出した。§2 では界面の運動方程式としてよく知られている平均曲率流方程式に関して、それを正当化した X. Chen [2] の論文の概略を紹介する。

また、平均曲率流方程式については数値計算も盛んに行われており、上記の理論も応用することができる。数値計算の新しい方法として、1992 年に Bence, Merriman, Osher の 3 人によって BMO アルゴリズムと呼ばれるスキームが提唱され、その収束性の証明や拡張が得られている ([6] を参照)。§3 では Neumann 条件下での平均曲率流に対してもこのアルゴリズムが適用できることを簡単に述べる。

なお、§3 の内容は石井仁司氏 (東京都立大学大学院理学研究科) との共同研究に基づいている。

2　X. Chen 氏の論文について

ここでは Allen - Cahn 方程式

$$(2.1)\qquad u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\phi(u^\varepsilon) = 0 \qquad in \quad \mathcal{R}^N \times (0, +\infty),$$

$$(2.2)\qquad u^\varepsilon(0, x) = g(x) \qquad (x \in \mathcal{R}^N)$$

を考える。但し、g は有界な連続関数であり、$\phi(r) = r(r^2 - 1)$ とする。この方程式は比較定理が成立ち、時間大域的な古典解が存在することはよく知られている。我々は $\varepsilon \to 0$ としたとき、(1) の解 u^ε の挙動を調べたい。

初期値 g に次の仮定をおく。2 つの定数 c_0、$C_0 > 0$ に対して

$$\sup_{x\in\mathcal{R}^N} |g(x)| + \sup_{\{x\in\mathcal{R}^N \mid |g(x)|\le c_0\}} |\nabla g(x)| \le C_0$$

それから、$\Gamma_0 = \{x \in \mathcal{R}^N \mid g(x) = 0\}$ はある有界領域の滑らかな境界になっているものとし、Γ_0 で囲まれた領域 Ω_0 では $g > 0$ であり、$\mathcal{R}^N \backslash \overline{\Omega}_0$ では $g < 0$ とする。

[4, 7] により、 $u^\varepsilon(0, x)$ が (2.1) に従って時間発展を始めた途端に $\mathcal{R}^N$ が $\{x \in \mathcal{R}^N \mid u^\varepsilon(x, t) \approx 1\}$ と $\{x \in \mathcal{R}^N \mid u^\varepsilon(x, t) \approx -1\}$ の領域に分離し、その間に界面と呼ばれる集合 $\Gamma_t^\varepsilon = \{x \in \mathcal{R}^N \mid u^\varepsilon(x, t) = 0\}$ が生成することがわかる。それを数学的に正当化したのが次の定理である。

Theorem 2. 1 *(cf. [2, p.119])*

$\forall k > 0$ に対して、 $\varepsilon_0 > 0$ (k とは無関係)、 $\tau_0 = \tau_0(k)$、 $M_0 = M_0(k)$ が存在して、 $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して

$$-1 - \varepsilon^k \leq u^\varepsilon(x, t) \leq 1 + \varepsilon^k, \forall x \in \mathcal{R}^N, t \geq \tau_0 \varepsilon^2 |\log \varepsilon|, \tag{2.3}$$

$$u^\varepsilon(x, \tau_0 \varepsilon^2 |\log \varepsilon|) \geq 1 - \varepsilon^k, \forall x \in \Omega^+_{M_0 \varepsilon |\log \varepsilon|}, \tag{2.4}$$

$$u^\varepsilon(x, \tau_0 \varepsilon^2 |\log \varepsilon|) \leq -1 + \varepsilon^k, \forall x \in \Omega^-_{M_0 \varepsilon |\log \varepsilon|}, \tag{2.5}$$

ただし、

$$\Omega^+_{M_0 \varepsilon |\log \varepsilon|} \equiv \{x \in \mathcal{R}^N \mid g(x) > M_0 \varepsilon |\log \varepsilon|\},$$
$$\Omega^-_{M_0 \varepsilon |\log \varepsilon|} \equiv \{x \in \mathcal{R}^N \mid g(x) < -M_0 \varepsilon |\log \varepsilon|\}.$$

[4, 7] より、$\varepsilon \to 0$ とすると、界面 $\{\Gamma_h^\varepsilon\}_{t>0}$ が平均曲率流に収束することが示唆されているのでそれが正しいことを証明する。先に述べたものに加えて g に次を仮定する。ある定数 $c_1 > 0$ が存在して、

$$|g(x)| \geq c_1 \mathrm{dist}(x, \Gamma_0), \ \forall x \in \{x \in \mathcal{R}^N \mid |g(x)| \leq c_1\} \tag{2.6}$$

結論は次の定理である。

Theorem 2. 2 *(cf. [2, p.122])* $\{\Gamma_t\}_{0 \leq t \leq T^*}$ を Γ_0 を初期値とする滑らかな平均曲率流とする。このとき、$\forall k > 0$ に対して $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(k) > 0$、$M_2 > 0$ が存在して、$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2), \tau_0(k+1)\varepsilon^2 |\log \varepsilon| \leq \forall t \leq T^*$ に対して

$$u^\varepsilon(x, t) \geq 1 - \varepsilon^k, \forall x \in \{x \in \mathcal{R}^N \mid d(x, t) > M_2 \varepsilon |\log \varepsilon|\},$$
$$u^\varepsilon(x, t) \leq -1 + \varepsilon^k, \forall x \in \{x \in \mathcal{R}^N \mid d(x, t) < -M_2 \varepsilon |\log \varepsilon|\},$$

Remark. (1) Γ_0 を初期値とする滑らかな平均曲率流の時間局所的な一意存在はよく知られている。特別な場合には時間大域解が一意に存在することも知られている。

(2) 上の定理より、$u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u^\varepsilon(x,t)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 1 && \text{if } d(x,t)>0,\\
u(x,t) &= -1 && \text{if } d(x,t)<0,\\
u(x,t) &= 0 && x\in\Gamma_t
\end{aligned}
$$

が導けるから界面は Γ_t と一致し、[4, 7] での形式的な議論の正当性を得る。

(3) この定理より $d_H(\Gamma^\varepsilon_t,\Gamma_t)\leqq M_2\varepsilon|\log\varepsilon|$ $(\forall t\in[\tau_0(k+1)\varepsilon^2|\log\varepsilon|,T^*])$ という評価が得られる。ただし、$d_H(A,B)=\max\{\sup_{x\in A}\mathrm{dist}(x,B),\sup_{x\in B}\mathrm{dist}(x,A)\}$ である。収束のみを対象にするのであれば、平均曲率流の広義解のレベルで議論できる (cf. [3])。

平均曲率流を扱うために符号付き距離関数を導入する。$\{\Gamma_t\}_{0\leq t<T}$ を滑らかな平均曲率流とし、符号付き距離関数 $d(x,t)$ を

$$
d(x,t)=\begin{cases}\mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) & x\in(\Gamma_t \text{ で囲まれた領域}),\\ -\mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) & \text{それ以外},\end{cases}
$$

と定義する。すると $\forall T^*<T$ に対して、$c_2>0$ が取れて、この $d(x,t)$ は領域 $\{(x,t)\mid \mathrm{dist}(x,\Gamma_t)\leqq c_2, 0\leqq t\leqq T^*\}$ で滑らかであり、

$$
d_t=\Delta d \qquad on \quad \Gamma_t \tag{2.7}
$$

を満たす。更に $C_2>0$ が存在して

$$
|\nabla d(x,t)|=1, \forall x\in\{x\in\mathcal{R}^N \mid |d(x,t)|\leq c_0\}, \tag{2.8}
$$

$$
\sup_{0\leq t\leq T^*,|d|\leq c_2}|\nabla(d_t(x,t)-\Delta d(x,t))|\leq C_2, \tag{2.9}
$$

となる。

Th. 2. 2 の証明の方針 [4, 7] 等で導入された接合漸近展開法による「第 0 次近似」を U として、$\varepsilon\to 0$ としたときに

$$
u^\varepsilon(x,t)\approx U\left(\frac{d(x,t)}{\varepsilon}\right)
$$

であることが予想されている。この関係から思い付くことは $u^\varepsilon(x,t)$ を U を用いて変換する。つまり、

$$
u^\varepsilon(x,t)=U\left(\frac{z^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}\right)
$$

として z^ε の満たす方程式を導く。

$$u_t^\varepsilon = \frac{U_z z_t^\varepsilon}{\varepsilon}, \Delta u^\varepsilon = \frac{U_z \Delta z^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{U_{zz}|\nabla z^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}, U_{zz} = \phi(U)$$

なのでこれを方程式 (2.1) に代入すると

$$z_t^\varepsilon - \Delta z^\varepsilon + \frac{U_{zz}}{\varepsilon U_z}(1 - |\nabla z^\varepsilon|^2) = 0 \tag{2.10}$$

を得る。この方程式で $\varepsilon \to 0$ とすると z^ε の (形式的な) 極限関数 z は

$$z_t - \Delta z = 0, |\nabla z| = 1 \tag{2.11}$$

を満たすことになり、これより $z(x,t) = d(x,t)$ となることが予想され、$z^\varepsilon(x,t) = d(x,t)+o(1)$ が導かれる。この予想を基にして Γ_t の近くで $\tilde{z}^\varepsilon(x,t) = d(x,t)+o(1)$ となる関数 $\tilde{z}^\varepsilon$ を構成し、これと進行波方程式の性質、(2.7) - (2.9)、及び方程式 (1) に対する比較定理を使って定理の結論を導く。

そのために (2.10) を少し見直して、

$$|\nabla z^\varepsilon|^2 U_{zz} - \varepsilon(z_t^\varepsilon - \Delta z^\varepsilon)U_z - \phi(U) = 0$$

としてみる。すると (2.11) より z^ε は

$$|\nabla z^\varepsilon| = 1 + o(1), z_t^\varepsilon - \Delta z^\varepsilon = o(1)$$

であることが期待されるだろうから、$\tilde{z}^\varepsilon$ の構成に

$$U_{zz} - o(1) \cdot U_z - \phi(U) + o(1) = 0 \qquad on \quad \mathcal{R}$$

という方程式が使えそうである。実際、進行波方程式の性質として次のようなものがある。ϕ に小さな摂動 λ を与えた関数 $\phi^\lambda = \phi+\lambda$ に対して、$(u_-^\lambda, u_0^\lambda, u_+^\lambda)(\to (-1,0,1)\ as\ \lambda \to 0)$ を ϕ^λ の零点とする。

Lemma 2. 3 *(cf. [2, p.130])* ある $\lambda^* > 0$ があって、$\forall\lambda \in [0,\lambda^*]$ に対して

$$\begin{aligned} &U_{zz} - CU_z - \phi^\lambda(U) = 0 \qquad on \quad \mathcal{R}, \\ &U(-\infty) = u_-^\lambda, U(0) = u_0^\lambda, U(+\infty) = u_+^\lambda \end{aligned}$$

を満たす (U^λ, C^λ) が唯一組存在する。更に λ とは無関係な α、$A > 0$ が存在して以下を満たす。

$$\begin{aligned} &u_+^\lambda - Ae^{-\alpha z} \le U^\lambda(z) < u_+^\lambda, \forall z > 0, \\ &u_-^\lambda \le U^\lambda(z) < u_-^\lambda + Ae^{-\alpha|z|}, \forall z < 0, \\ &0 < U^\lambda(z) \le Ae^{-\alpha|z|}, \forall z \in \mathcal{R}^1, \\ &|C^\lambda| + \sup_{z\in\mathcal{R}^1}\left|\frac{U_{zz}^\lambda(z)}{U_z^\lambda(z)}\right| \le A, \\ &|C^\lambda| + \sup_{z\in\mathcal{R}^1}|U(z) - U^\lambda(z)| \le A|\lambda| \end{aligned}$$

$\tilde{z}^\varepsilon$ を

$$\tilde{z}^\varepsilon(x,t) = \begin{cases} d(x,t) + o(1) & \Gamma_t\text{の近く}, \\ \text{正定数} & \Gamma_t\text{の内側}, \\ \text{負定数} & \Gamma_t\text{の外側}, \end{cases}$$

とおき、$U^\lambda(\tilde{z}^\varepsilon(x,t)/\varepsilon)$ を方程式 (2.1) に代入し、上の補題と方程式 (2.10) を修正したもので、(2.1) の左辺を評価し、λ を上手に選べば、これが (2.1) の subsolution になることが言える。

同様な方法で (2.1) の supersolution も構成できるので比較定理から、結論が導ける。

3 BMO アルゴリズムの Neumann 条件下における平均曲率流への応用

ここでは平均曲率流の Neumann 問題に対する BMO アルゴリズムの収束について述べる。

$\Omega \subset \mathcal{R}^N$ を境界が滑らかな有界領域とする。まず、[8, 9] のアイデアに従い、積分核を閉単位球 $B = B_N(0,1)$ 上での定義関数とした場合の定式化を行う。$h > 0$ とし、$g \in C(\overline{\Omega})$ に対して、作用素 G_h を

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{aligned} G_h g(x) \;=\; & \sup\{\lambda \in \mathcal{R} \mid |B_N(x,\sqrt{h}) \cap \{y \in \Omega \mid \varphi(y) \geqq \lambda\}| \\ & \geqq |B_N(x,\sqrt{h}) \cap \Omega|/2\} \end{aligned}$$

と定義する。ただし、$|\cdot|$ は N 次元 Lebesgue 測度である。$h = T/m$ と取り、関数 $u^m = u^m(x,t)$ を

$$u^m(x,t) = (G_{t-mh}\underbrace{G_h \cdots G_h}_{m \text{ times}} g)(x) \quad (x \in \overline{\Omega}, mh < t \leqq (m+1)h)$$

によって定義する。すると $u^m(x,t)$ の収束は以下のように述べられる。

Theorem 3. 1 $\overline{\Omega} \times [0,T)$ 上で広義一様に

$$\lim_{m\to+\infty} u^m(x,t) = u(x,t)$$

が成り立つ。ただし、$u(x,t)$ は次の方程式の唯一つの粘性解である。

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} u_t + F(Du, D^2u) = 0 & in \quad \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & on \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & in \quad \overline{\Omega}. \end{cases}$$

ここで、

$$F(p, X) = -\frac{1}{2(N+1)}\mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\right) X\right\}$$

である。

Remark. 定理 3. 1 中の境界値問題に対する粘性解の一意存在は Giga - M. H. Sato [5] によって得られている。

定理 3. 1 の証明の概略. 次の補題を証明すればよい。

Lemma 3. 2 $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$、$z \in \overline{\Omega}$ を固定する。$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $z \in \Omega$ かつ $D\varphi(z) \neq 0$ ならば、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in B_N(z, \delta)$、$h \in (0, \delta]$ に対して

$$\begin{aligned} &G_h\varphi(x) \leqq \varphi(x) + (-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) + \varepsilon)h \\ &(resp., G_h\varphi(x) \geqq \varphi(x) + (-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) - \varepsilon)h) \end{aligned} \tag{3.3}$$

(2) $z \in \partial\Omega$ かつ $\partial\varphi/\partial n(z) > 0$ *(resp.,* < 0*)* ならば *(1)* と同じ主張が成り立つ。

この補題が証明できたとする。このとき、関数 $\overline{u}$、$\underline{u}$ を

$$\begin{aligned} \overline{u}(t, x) = \lim_{r \to 0} \sup\{u^m(s, y) \mid 0 \leqq s < T, y \in \overline{\Omega}, \\ |s - t| + |y - x| < r, m > r^{-1}\}, \\ \underline{u}(t, x) = \lim_{r \to 0} \inf\{u^m(s, y) \mid 0 \leqq s < T, y \in \overline{\Omega}, \\ |s - t| + |y - x| < r, m > r^{-1}\}, \end{aligned}$$

と定義すると、Barles - Souganidis [1] による Trotter - Kato 型の収束定理より、$\overline{u}$ (resp., $\underline{u}$) は (3.2) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) になることがわかる。$\overline{u}(x, 0) = \underline{u}(x, 0) = g(x)$ は簡単に示せるので Giga - M. H. Sato [5] の結果と粘性解の安定性より、結論が得られる。 □

補題 3. 2 の証明の概略. G_h の定義より

$$G_h\varphi(x) \leqq (resp., \geqq)\ \lambda \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |\{y \in B_N(x, \sqrt{h}) \cap \Omega \mid \varphi(y) \geqq \lambda\}| \\ &\quad \leqq (resp., \geqq)\ |\{y \in B_N(x, \sqrt{h}) \cap \Omega \mid \varphi(y) < \lambda\}| \end{aligned} \tag{3.5}$$

が言える。この関係を基にして証明を行う。

$\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$、$z \in \overline{\Omega}$、$\varepsilon > 0$ を任意に取る。$\widetilde{G}_h\varphi(x)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_h\varphi(x) &= \sup\{\lambda \in \mathcal{R} \mid |\{y \in B_N(x, \sqrt{h}) \mid \varphi(y) \geqq \lambda\}| \\ &\qquad \geqq |B_N(x, \sqrt{h})|/2\}\end{aligned}$$

このとき、$\widetilde{G}_h$ には次の補題が得られている。

Lemma 3. 3 *(cf. H. Ishii - Pires - Souganidis [9])* $\varphi \in C^2(\mathcal{R}^N)$、$z \in \mathcal{R}^N$、$\varepsilon > 0$ とする。$D\varphi(z) \neq 0$ を仮定する。このとき$\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in B_N(z, \delta)$、$h \in (0, \delta]$ に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_h\varphi(x) &\leqq \varphi(x) + (-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) + \varepsilon)h \\ \widetilde{G}_h\varphi(x) &\geqq \varphi(x) + (-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) - \varepsilon)h\end{aligned} \tag{3.6}$$

$G_h\varphi(x)$ と $\widetilde{G}_h\varphi(x)$ を比較してこの補題に持ち込めば、補題 3. 2 が証明できる。

以下では、$\widetilde{\lambda} = \widetilde{G}_h\varphi(x)$ とし、簡単のため、$N = 2$ とする。

$z \in \Omega$、$D\varphi(z) \neq 0$ ならば、$\delta_1 > 0$ が取れて、

$$B_2(z, \delta_1) \subset \Omega, D\varphi(x) \neq 0\ (\forall x \in B_2(z, \delta_1))$$

が言えるので、小さな任意の $h > 0$ に対して、$G_h\varphi(x) = \widetilde{G}_h\varphi(x)$ $(\forall x \in B_2(z, \delta_1/2))$ となり、(1) の主張が成り立つ。よって $z \in \partial\Omega$、$(\partial\varphi/\partial n)(z) > 0$ と仮定してよい。

φ を Ω の外に延長して

$$\begin{aligned}&\varphi \in C^2(B_2(z, \delta_2)), \langle D\varphi(x), n(y)\rangle > 0, \\ &(\exists\delta_2 > 0, \forall x \in B_2(z, \delta_2), \forall y \in B_2(z, \delta_2) \cap \partial\Omega)\end{aligned} \tag{3.7}$$

となるようにしておく。以後、$y \to (y - x)/\sqrt{h}$ と変数変換した状態で考え、$\Phi(y) = \varphi(x - \sqrt{h}y)$ とする。すると (3.5) は

$$\begin{aligned}&|\{y \in B \cap \Omega(h, x) \mid \Phi(y) \geqq \widetilde{\lambda}\}| \\ &\leqq (\mathit{resp.} \geqq)\ |\{y \in B \cap \Omega(h, x) \mid \Phi(y) < \widetilde{\lambda}\}|\end{aligned} \tag{3.8}$$

と同値であり、これを示せばよいことになる。ここで、

$$\Omega(h, x) = \{(y - x)/\sqrt{h} \mid y \in \Omega\}。$$

実際にはいくつかの場合分けをするが、ここでは

$$B \cap \{y \mid \Phi(y) = \tilde{\lambda}\} \cap \partial\Omega(h,x) \neq \emptyset$$

の場合のみを考える。C_i $(i = 1, 2, \cdots)$ は $h > 0$、$x \in B_2(z, \delta_2)$ によらない定数とする。

ξ を $\partial\Omega(h,x)$ と $\{\Phi(y) = \tilde{\lambda}\}$ との交点とし、ξ における $\partial\Omega(h,x)$ の接線を $T_\xi : y_2 = ay_1 + b$ とすると、

$$|\Phi(0) - \tilde{\lambda}| \leqq C_1\sqrt{h}, \mathrm{dist}(0, T_\xi) \leqq C_2 \tag{3.9}$$

(図 1 を参照)

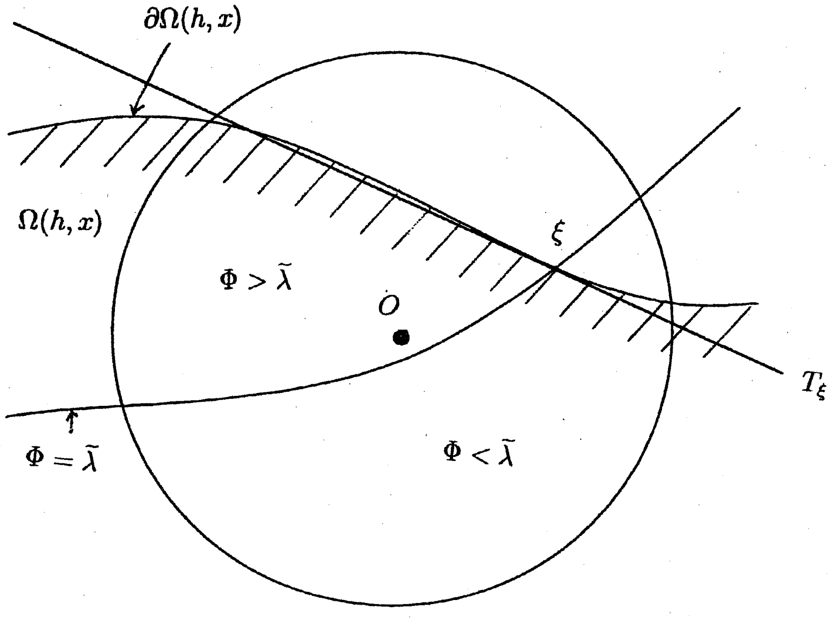

図 1

T_ξ と $\{\Phi(y) = \Phi(0)\}$ の $y = 0$ における接線 $T_0 : y_2 = cy_1$ を使って図 1 を線形化すると図 2 のようになる。ただし、

$$\begin{aligned}
&D_2 = \{y \in B \mid \mathrm{dist}(y, T_\xi) \leqq C_3\sqrt{h}\}, D_3 = \{y \in B \mid \mathrm{dist}(y, T_0) \leqq C_4\sqrt{h}\},\\
&T^+ = \{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid y_2 < ay_1 + b, y_2 > cy_1\},\\
&T^- = \{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid y_2 < ay_1 + b, y_2 < cy_1\}
\end{aligned}$$

である。$\partial\Omega(h,x) \cap B$、$\{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid \Phi(y) = \tilde{\lambda}\}$ はそれぞれ D_2、D_3 に含まれていることに注意する。よって領域 $D_4 \subset B \cap \Omega(h,x)^c$ と $h_1 > 0$ が取れて $\forall h \in (0, h_1)$ に対して

$$D_2 \cap D_4 = \emptyset, D_3 \cap D_4 = \emptyset \ (\forall h \in (0, h_1))$$

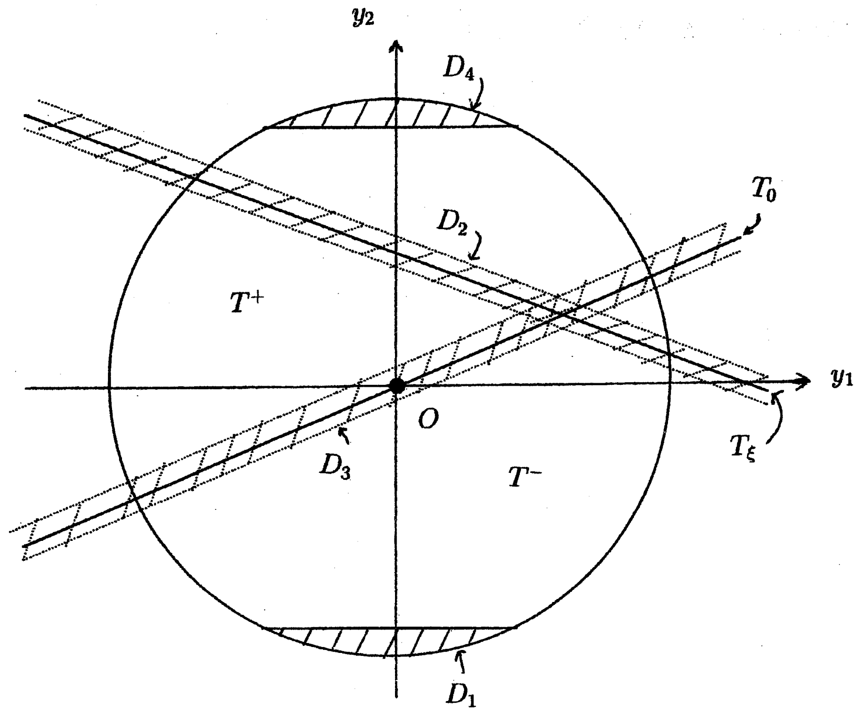

図 2

を満たす。B の対称性から T^- 内に D_4 と合同な領域 D_1 が取れて、$D_1 \cap D_2 = \emptyset$ を満たす。これらを考慮して

$$
\begin{aligned}
&|\{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid \Phi(y) \geqq \tilde{\lambda}\}| - |\{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid \Phi(y) < \tilde{\lambda}\}| \\
&\quad \leqq |T^+| - |T^-| + |D_2| + |D_3| \\
&\quad \leqq -|D_1| + C_5\sqrt{h}
\end{aligned}
$$

が得られる。従って $h_2 \in (0, h_1)$ を十分小さく取ると、$\forall h \in (0, h_2)$ に対して

$$
|\{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid \Phi(y) \geqq \tilde{\lambda}\}| < |\{y \in B \cap \Omega(h,x) \mid \Phi(y) < \tilde{\lambda}\}|
$$

が成り立つので、(3.5)、(3.8) より

$$
G_h\varphi(x) \leqq \tilde{\lambda} = \tilde{G}_h\varphi(x)
$$

となるので補題 3. 3 とあわせて、補題 3. 2 の主張を得る。 □

参考文献

[1] G. Barles and P. E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully non-linear equations. *Asymptotic Anal.*, 4:271–283, 1991.

[2] X. Chen. Generation and propagation of the interface for reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations*, 96:116–141, 1992.

[3] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transition and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:1097–1123, 1992.

[4] P. C. Fife. *Dymanical of Internal Layers and Difusive Interfaces, CBMF-MSF regional Conference Series in Applied Mathematics.* SIAM, Philadelphia, 1988.

[5] Y. Giga and M. H. Sato. Neumann problem for singular degenerate parabolic equations. *Differential Integral Equations*, 6:1217–1230, 1993.

[6] S. Goto. 平均曲率流の数値解析 - BMO Algorithm -. **京都大学数理解析研究所講究録**, 1045:53–56, 1998.

[7] M. Iida. 京都大学数理解析研究所講究録, 1999.

[8] H. Ishii. A generalization of the Bence, Merryman and Osher algorithm for motion by mean curvature. *in Curvature flows and related topics, (ed. A. Damlamian, J. Spruck, A. Visintin), Gakko Tosho, Tokyo*, 00:111–127, 1995.

[9] H. Ishii, G. E. Pires, and P. E. Souganidis. Threshold dynamics type approximationschemes for propagating fronts. *J. Math. Soc. Japan* (to appear), 1997.